式と証明

例題 1　二項定理／係数を求める

（ア）

別解

x が 5 個，$-2y$ が 3 個の順列より，$\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}x^5(-2y)^3=-448x^5y^3$　$\therefore -448$

（イ）

別解

$(a+b+c)^{10}$ の a^2bc^7 の項は a 2 個，b 1 個，c 7 個の順列の積の和だから，

$\dfrac{10!}{2!\cdot 7!}a^2bc^7=360a^2bc^7$　$\therefore 360$

$(x^2)^k x^l 1^m$ とすると，$k+l+m=10$，$2k+l=5$ より，$(k,\ l,\ m)=(0,\ 5,\ 5),\ (1,\ 3,\ 6),\ (2,\ 1,\ 7)$

よって，$\dfrac{10!}{5!\cdot 5!}(x^2)^0\cdot x^5\cdot 1^5+\dfrac{10!}{3!\cdot 6!}(x^2)^1\cdot x^3\cdot 1^6+\dfrac{10!}{2!\cdot 7!}(x^2)^2\cdot x^1\cdot 1^7=1452x^5$　$\therefore 1452$

1　演習題

（ア）

別解

$(2x-y+z)^8$ の展開式は $2x,\ -y,\ z$ から成る 8 個の順列の積の総和になる。

したがって，$x^2y^3z^3$ の項は，$2x$ 2 個，$-y$ 3 個，z 3 個の順列の積の和となる。

このときの順列の総数は $\dfrac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 3!}=560$

これと，各順列の積，すなわち $2x$ 2 個，$-y$ 3 個，z 3 個の積が $(2x)^2(-y)^3z^3=-4x^2y^3z^3$ であることから，$(2x-y+z)^8$ の展開式の $x^2y^3z^3$ の項は $560\cdot(-4x^2y^3z^3)=-2240x^2y^3z^3$

よって，係数は -2240

（イ）

別解

$(1+x+ax^2)^6$ の展開式は $1,\ x,\ ax^2$ から成る 6 個の順列の積の総和になる。

したがって，1 が k 個，x が l 個，ax^2 が m 個から成る項は，$k+l+m=6$ より，

$\dfrac{6!}{k!\,l!\,m!}1^k x^l (ax^2)^m=\dfrac{6!}{k!\,l!\,m!}a^m x^{l+2m}$　・・・①

とくに x^4 の項の係数を求める場合

$l+2m=4,\ l\geqq 0,\ m\geqq 0$ を満たせばよいから，$(i,\ m)=(0,\ 2),\ (2,\ 1),\ (4,\ 0)$

これと $k+l+m=6$ より，$(k,\ l,,\ m)=(4,\ 0,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1),\ (2,\ 4,\ 0)$

各々を①に代入し，それらの和をとると，

$$\frac{6!}{4!\cdot 0!\cdot 2!}a^2x^4+\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}ax^4+\frac{6!}{2!\cdot 4!\cdot 0!}a^0x^4=15a^2x^4+60ax^4+15x^4$$
$$=15(a^2+4a+1)x^4$$
$$=15\{(a+2)^2-3\}x^4$$

よって，x^4 の項の係数は $15\{(a+2)^2-3\}$

ゆえに，x^4 の項の係数は $a=-2$ のときに最小値 -45 をとる。

（ウ）

別解

x^5 の係数

$\left(x-\frac{2}{x}+2\right)^9$ の展開式は $x,\ -\frac{2}{x},\ 2$ から成る 9 個の順列の積の和になる。

したがって，x が k 個，$-\frac{2}{x}$ が l 個，2 が m 個から成る各項は，$k+l+m=9$ より，

$$\frac{9!}{k!\,l!\,m!}x^k\left(-\frac{2}{x}\right)^l 2^m=\frac{9!}{k!\,l!\,m!}(-1)^l 2^{l+m}x^{k-l}\quad\cdots①$$

とくに x^5 の係数を求める場合

$k-l=5$，$k\geq 0$，$l\geq 0$，$k+l\leq 9$ より，$(k,\ l)=(5,\ 0),\ (6,\ 1),\ (7,\ 2)$

これと $k+l+m=9$ より，$(k,\ l,\ m)=(5,\ 0,\ 4),\ (6\ 1,,\ 2),\ (7,\ 2,\ 0)$

各々を①に代入し，それらの和をとると，

$$\frac{9!}{5!\cdot 0!\cdot 4!}(-1)^4 2^4x^5+\frac{9!}{6!\cdot 1!\cdot 2!}(-1)^1 2^3x^5+\frac{9!}{7!\cdot 2!\cdot 0!}(-1)^2 2^2x^5=(9\cdot 7\cdot 2^5-9\cdot 7\cdot 2^5+9\cdot 8\cdot 2)x^5$$
$$=144x^5$$

よって，x^5 の係数は 144

全ての係数の総和

全ての係数の総和では項の区別をしないから，

求める和は $\left(x-\frac{2}{x}+2\right)^9$ から x を除いた和となる。

よって，$(1-2+2)^9=1^9=1$

例題 2　整式の割り算／割り算の実行

別解

$f(x)$ の x^4 の係数が a，定数項が 4 だから，$f(x)$ を $g(x)$ で割った商は $ax-2$

よって，$ax^4+bx^3+cx^2-16x+4=(x^3-4x^2+5x-2)(ax-2)$

これより，$ax^4+bx^3+cx^2-16x+4=ax^4+(-4a-2)x^3+(5a+8)x^2+(-2a-10)x+4$

したがって，$\begin{cases} b=-4a-2 \\ c=5a+8 \\ -16=-2a-10 \end{cases}$　$\therefore (a,\ b,\ c)=(3,\ -14,\ 23)$

ゆえに，$a-b-c=3-(-14)-23=-6$

例題 4　整式の割り算／剰余の定理と虚数

（イ）

補足

$x^2+x+1=0$ の虚数解の 1 つを α とすると，

$\alpha^2+\alpha+1=0$ より，$\alpha(\alpha^2+\alpha+1)=\alpha\cdot 0$　すなわち $\alpha^3+\alpha^2+\alpha=0$　$\therefore \alpha^3=-(\alpha^2+\alpha)$

これと $\alpha^2+\alpha=-1$ より，$\alpha^3=1$

4　演習題

（ア）

補足

$\omega=p+qi$　（$p\neq 0,\ q\neq 0$）とおくと，

$(a-3)\omega+b+2=\{p(a-3)+b+2\}+q(a-3)i=0$ より，$a=3,\ b=-2$

例題 5　整式の割り算／$(x-a)^k$ で割ったあま有り

（ア）

解説補充

$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x-1)Q(x)+n$ より，

$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=(x-1)\{(x-1)Q(x)+n\}$　$\therefore x^n-1=(x-1)^2Q(x)+nx-n$

例題 6　整式の割り算／2 つの余りの条件

（ア）

解説補充

$f(x)$ を $x-1$ で割った商を $A(x)$，x^2+x+1 で割った商を $B(x)$ とすると，

条件より，

$f(x)=(x-1)A(x)+3$　・・・①

$f(x)=(x^2+x+1)B(x)+4x+5$　・・・②

$f(x)$ を x^3-1 で割った商を $C(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると，

$f(x)=(x^3-1)C(x)+ax^2+bx+c$ とおくと，$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ より，

$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)C(x)+ax^2+bx+c$

よって，

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)(x^2+x+1)C(x)+(x-1)(ax+a+b)+a+b+c\\&=(x-1)\{(x^2+x+1)C(x)+ax+a+b\}+a+b+c\end{aligned}$$

これと①より，$a+b+c=3$　・・・④

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)(x^2+x+1)C(x)+a(x^2+x+1)+(b-a)x+c-a\\&=(x^2+x+1)\{(x-1)C(x)+a\}+(b-a)x+c-a\end{aligned}$$

これと②より，$b-a=4$　・・・⑤，$c-a=5$　・・・⑥

④，⑤，⑥より，$a=-2, b=2, c=3$

よって，求める余りは，$-2x^2+2x+3$

6　演習題

（イ）

$A(x)$ を x^3+x^2+4 で割った余り

$x^3+x^2+4=(x+2)(x^2-x+2)$，$A(x)$ を x^2-x+2 で割った余りが $4x-1$

より，

A を x^3+x^2+4 で割った余りは $a(x^2-x+2)+4x-1$（a は実数）と表せる。

また，このときの商を $B(x)$ とすると，

$A(x)=(x+2)(x^2-x+2)B(x)+a(x^2-x+2)+4x-1$（$a$ は実数）　・・・①

$A(x)$ を x^2-4 で割った余りが $-x+1$ だから，剰余定理より，$A(-2)=-(-2)+1=3$

これと①において $A(-2)=8a-9$ であることから，$8a-9=3$　$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

ゆえに，求める余りは $\dfrac{3}{2}(x^2-x+2)+4x-1=\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{5}{2}x+2$

例題 8　恒等式

（イ）

$x-1=t$ とおくと，$(t+1)^3+2(t+1)^2+1=t^3+at^2+bt+c$ より，

$t^3+5t^2+7t+4=t^3+at^2+bt+c \quad \therefore a=5,\ b=7,\ c=4$

例題 13　不等式の証明／等式の条件つき

(2)

別解：**(1)**を利用

$\left(\dfrac{a}{2}+b\right)+\left(\dfrac{a}{2}+c\right)=1$ より，

$\left(\dfrac{a}{2}+b\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}+c\right)^2 \geq \dfrac{1}{2}$ （等号成立は $b=c,\ a+b+c=1$ のとき）　・・・①

$\left(a+\dfrac{b}{2}\right)+\left(\dfrac{b}{2}+c\right)=1$ より，

$\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{b}{2}+c\right)^2 \geq \dfrac{1}{2}$ （等号成立は $a=c,\ a+b+c=1$ のとき）　・・・②

$\left(a+\dfrac{c}{2}\right)+\left(b+\dfrac{c}{2}\right)=1$ より，

$\left(a+\dfrac{c}{2}\right)^2+\left(b+\dfrac{c}{2}\right)^2 \geq \dfrac{1}{2}$ （等号成立は $a=b,\ a+b+c=1$ のとき）　・・・③

①＋②＋③より，

$\dfrac{5}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)+2ab+2bc+2ca \geq \dfrac{3}{2}$

これと $2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)=1-\left(a^2+b^2+c^2\right)$ より，

$\dfrac{5}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)+1-\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq \dfrac{3}{2}$

よって，$a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{1}{3}$ （等号成立は $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ のとき）

補足：間違った**(1)**の利用

(1)と $a+(b+c)=1$ より，$a^2+(b+c)^2 \geq \dfrac{1}{2}$ （等号成立は $a=b+c=\dfrac{1}{2}$ のとき）　・・・①

同様に，$b^2+(c+a)^2 \geq \dfrac{1}{2}$ （等号成立は $b=a+c=\dfrac{1}{2}$ のとき）　・・・②

$c^2+(a+b)^2 \geq \dfrac{1}{2}$ （等号成立は $c=a+b=\dfrac{1}{2}$ のとき）　・・・③

①＋②＋③より，$3\left(a^2+b^2+c^2\right)+2ab+2bc+2ca\geq\dfrac{3}{2}$

これと $2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)=1-\left(a^2+b^2+c^2\right)$ より，

$3\left(a^2+b^2+c^2\right)+1-\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\dfrac{3}{2}$

よって，$a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{1}{4}$

しかし，等号が成立するには，

$a=b+c=\dfrac{1}{2}$，$b=c+a=\dfrac{1}{2}$，$c=a+b=\dfrac{1}{2}$ の連立方程式の解が存在しなければならない。

しかし，この連立方程式の解は存在しない。

よって，$a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{1}{4}$ は成り立たない。

13　演習題

(2)

別解：**(1)**の結果を利用

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{y}\right)+\frac{1}{3}\sqrt{z}$$

$$\leq\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y}+\frac{1}{3}\sqrt{z}\quad（x=y \text{ のとき等号成立}）$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y}+\frac{1}{3}\sqrt{z}\leq\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)+\frac{1}{3}z}$$

$$=\sqrt{\frac{x+y+z}{3}}\quad（\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=z \text{ のとき等号成立}）$$

よって，

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3}\leq\sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

等号成立は $x=y$ かつ $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y=z$ のとき，すなわち $x=y=z$ のとき

15　演習題

（イ）

(2)

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)=\left(\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_2}{a_n}\cdots+\frac{a_n}{a_n}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_n}\right)$$

$$+\left\{\left(\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_2}{a_n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\right\}$$

$$=n+\left\{\left(\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_2}{a_n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\right\}$$

ここで，$\left\{\left(\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_2}{a_n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\right\}$について，

$\left(\frac{a_j}{a_i},\frac{a_i}{a_j}\right)$（$1\leq i\leq n$，$1\leq j\leq n$，$i\neq j$）の組み合わせの総数は

$\frac{a_j}{a_i}$と$\frac{a_i}{a_j}$は異なる(　)の和の要素となる分数で，(　)の数はnであることから，${}_nC_2$

わかりやすく解説すると，

$\left\{\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_1},\cdots,\frac{a_n}{a_1}\right\},\left\{\frac{a_1}{a_2},\frac{a_3}{a_2},\cdots,\frac{a_n}{a_2}\right\},\cdots,\left\{\frac{a_1}{a_{n-1}},\frac{a_2}{a_{n-1}},\cdots\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}},\frac{a_n}{a_{n-1}}\right\},\left\{\frac{a_1}{a_n},\frac{a_2}{a_n},\cdots,\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}$

のn個のグループに分ける。

分母がa_iのグループから$\frac{a_j}{a_i}$を選ぶと，そのペアは分母がa_jのグループの$\frac{a_i}{a_j}$である。

したがって，異なるペアならばその出身グループの組合せも異なる。

ゆえに，$\left(\frac{a_j}{a_i},\frac{a_i}{a_j}\right)$（$1\leq i\leq n$，$1\leq j\leq n$，$i\neq j$）の組み合わせの総数は

n個のグループから 2 つのグループの選び方の総数と一致する。

あるいは

$\left\{\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_1},\cdots,\frac{a_n}{a_1}\right\},\left\{\frac{a_1}{a_2},\frac{a_3}{a_2},\cdots,\frac{a_n}{a_2}\right\},\cdots,\left\{\frac{a_1}{a_{n-1}},\frac{a_2}{a_{n-1}},\cdots\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}},\frac{a_n}{a_{n-1}}\right\},\left\{\frac{a_1}{a_n},\frac{a_2}{a_n},\cdots,\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}$

はグループ数n，各グループに属する要素の数は$n-1$だから総数は$n(n-1)$

各々の要素が 1 対 1 でペアをつくるから，ペアの総数は$\frac{n(n-1)}{2}$

これと $\dfrac{a_j}{a_i}+\dfrac{a_i}{a_j}\geq 2$ （等号は $a_i=a_j$ のとき成立）であることから，

$$\begin{aligned}(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)&=n+\left\{\left(\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_2}{a_n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\right\}\\&\geq n+{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2\\&=n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\\&=n^2\end{aligned}$$

等号は $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のとき成立

16　コーシー・シュワルツの不等式

(2) 別解

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+1)x^2-2(ac+bd+1)x+c^2+d^2+1\\&=(a^2+b^2+1)\left(x-\frac{ac+bd+1}{a^2+b^2+1}\right)^2-\frac{(ac+bd+1)^2}{a^2+b^2+1}+c^2+d^2+1\\&=(a^2+b^2+1)\left(x-\frac{ac+bd+1}{a^2+b^2+1}\right)^2+\frac{-(ac+bd+1)^2+(a^2+b^2+1)(c^2+d^2+1)}{a^2+b^2+1}\\&=(a^2+b^2+1)\left(x-\frac{ac+bd+1}{a^2+b^2+1}\right)^2+\frac{(ad-bc)^2+(a-c)^2+(b-d)^2}{a^2+b^2+1}\geq 0\end{aligned}$$

でも，これをやってしまうと(3)の意味が，，，

16　演習題

別解

$a+b+c=k$ とおくと，$c=k-a-b$ より，

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-1&=a^2+b^2+(k-a-b)^2\\&=2a^2+2(b-k)a+2b^2-2kb+k^2-1\end{aligned}$$

これと $a^2+b^2+c^2-1=0$ より，$2a^2+2(b-k)a+2b^2-2kb+k^2-1=0$

a は実数だから，判別式を D とすると，$D\geq 0$ より，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(b-k)^2-2(2b^2-2kb+k^2-1)\\&=-3b^2+2kb-k^2+2\\&\geq 0\end{aligned}$$

$\therefore 3b^2-2kb+k^2-2\leq 0$

これと $3b^2-2kb+k^2-2=3\left(b-\dfrac{k}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}k^2-2$ より，$\dfrac{2}{3}k^2-2\leq 0$　　$\therefore -\sqrt{3}\leq k\leq\sqrt{3}$

ゆえに，$a+b+c$ の最大値は $\sqrt{3}$